

Midtoets Lineaire Algebra

maandag 23 mei 2011 14.00 - 16.00 uur

Tijdens deze toets mogen boek/diktaat/aantekeningen en een eenvoudige rekenmachine worden geraadpleegd. Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes!

Vermeld op elke bladzijde je naam en studentnummer.

Gratis: 10

1. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

- (a) 3 Bepaal de vector met lengte 1 in de richting van vector \mathbf{a} .
- (b) 5 Neem $\alpha = 0$ en bepaal de hoek in radialen tussen de vectoren \mathbf{b} en \mathbf{c} .
- (c) 4 Voor welke waarde(n) van α staan \mathbf{a} en \mathbf{c} loodrecht op elkaar?
- (d) 6 Laat zien dat de vectoren \mathbf{a} , \mathbf{b} en \mathbf{c} lineair onafhankelijk zijn voor elke α in \mathbb{R}^1 .

2. Gegeven zijn de matrix \mathbf{A} en de vector \mathbf{b}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierin zijn α en β nader te bepalen constantes.

- (a) 7 Neem $\alpha = 2$ en $\beta = 1$ en bereken de oplossing van de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (b) 10 Bepaal voor welke α en β de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossing heeft.

3. Gegeven is de matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) 6 Bereken de matrix A^2 .
- (b) 6 Bereken de inverse van A .

Z.O.Z.

4. Laat $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een lineaire transformatie zijn waarbij

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 + x_2 + 5x_3, 2x_2 + 4x_3)$$

- (a) $\boxed{8}$ Bepaal alle \mathbf{x} waarvoor geldt dat $T(\mathbf{x}) = (8, 16, 8)$
- (b) $\boxed{4}$ Ga na of de transformatie onto en/of one-to-one is. Hint: Gebruik de bevindingen uit de berekeningen bij onderdeel (a).

5. Een lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ roteert een punt over $-3\pi/4$ radialen en spiegelt het daarna horizontaal door de x_1 -as.

(a) $\boxed{7}$ Geef de standaard matrix van de transformatie T .

(b) $\boxed{4}$ Bepaal het beeld van $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

6. Een economie bestaat uit drie sectoren: Chemie, Energie en Metaal. Chemie verkoopt 30% van zijn output aan Energie, 50% aan Metaal en houdt de rest. Energie verkoopt 60% van zijn output aan Chemie, 30% aan Metaal en houdt de rest. Metaal verkoopt 40% van zijn output aan Chemie, 30% aan Energie en houdt de rest.

(a) $\boxed{3}$ Maak een tabel van de overgangen in deze economie.

(b) $\boxed{3}$ Maak een tekening van de economie zoals in Par. 1.6.

(c) $\boxed{3}$ Geef het systeem aan vergelijkingen waarbij de inkomsten gelijk zijn aan de uitgaven.

(d) $\boxed{3}$ Formuleer de augmented matrix.

(e) $\boxed{8}$ Bereken de equilibrium prijzen waarbij de prijs voor Metaal output gelijk is aan 100 eenheden.

Totaal: $\boxed{100}$